

Προσομοίωση Εξετάσεων (Εξ Αποστάσεως) Διαφορικές Εξισώσεις

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Να απαντήσετε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι Αληθείς ή Ψευδείς και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Θέμα (1) Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, $t \in I$.

- (i) Αν y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις αυτής, τότε οι συναρτήσεις $y_3 = a_1y_1 + a_2y_2$ και $y_4 = b_1y_1 + b_2y_2$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις αυτής.
- (ii) Αν η ορίζουσα Wronski δύο τυχαίων λύσεων της παραπάνω εξίσωσης είναι σταθερή και μη μηδενική στο I , τότε η συνάρτηση p εκεί που ορίζεται κάνει μηδέν στο I .
- (iii) Αν y_1, y_2 λύσεις της εξίσωσης οι οποίες έχουν κοινή ρίζα στο I , τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
- (iv) Αν y_1, y_2 λύσεις της εξίσωσης οι οποίες έχουν με μέγιστα ή ελάχιστα στο ίδιο σημείο του διαστήματος I , τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
- (v) Αν y_1, y_2 λύσεις της εξίσωσης με κοινό σημείο καμπής t_0 στο I , τότε δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες εκτός αν τα p και q μηδενίζονται στο t_0 .

Θέμα (2)

- (i) Υπάρχει γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της οποίας κάθε λύση y τείνει προς το E , όπου E το έτος γέννησής σας.
- (ii) Υπάρχει γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της οποίας κάθε λύση y είναι ασυμπτωτική προς την ευθεία $y = 3 - t$.
- (iii) Η διαφορική εξίσωση $\left(\frac{y}{t} + 6t\right) dt + (\log t - 2)dy$, έχει συγκλίνουσες λύσεις σε πραγματικό αριθμό, για $t \rightarrow +\infty$.

Θέμα (3) Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$, $t \geq 0$.

- (i) Αν $a, b, c > 0$ κάθε λύση της εξίσωσης τείνει προς το 0, όταν $t \rightarrow +\infty$.
- (ii) Αν $a, b, c > 0$ υπάρχουν μη φραγμένες λύσεις της εξίσωσης.
- (iii) Αν $a, c > 0$ και $b = 0$ κάθε λύση της εξίσωσης τείνει προς το 0, όταν $t \rightarrow +\infty$.
- (iv) Αν $a, c > 0$ και $b = 0$ υπάρχουν μη φραγμένες λύσεις της εξίσωσης.

Θέμα (4) Για την επίλυση μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με την μέθοδο των δυναμοσειρών γύρω από το ομαλό σημείο $x_0 = 0$, θεωρείστε ότι έχουμε βρεί $R = +\infty$ και ότι ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας συντελεστών είναι ο εξής:

$$c_{n+2} = \frac{(n-0,5)n}{(n+1)(n+2)} c_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

- (i) Δεν υπάρχει πολυωνυμική λύση της εν λόγω διαφορικής εξίσωσης.
- (ii) Υπάρχει βασικό σύνολο λύσεων $\{y_1, y_2\}$ της δ.ε ώστε οι y_1, y_2 να είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[-E, E]$, όπου E το έτος γέννησής σας.
- (iii) Για κάθε βασικό σύνολο λύσεων $\{z_1, z_2\}$ της δ.ε οι z_1, z_2 είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[-E, E]$, όπου E το έτος γέννησής σας.
- (iv) Υπάρχει βασικό σύνολο λύσεων y_1, y_2 για το οποίο $y_2'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Θέμα (5) Δίνεται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων $y_1' = 3y_1 - 2y_2, y_2' = 2y_1 - 2y_2$.

- (i) Κάθε λύση $Y = (y_1, y_2)^T$ του συστήματος γράφεται $Y = c_1 \bar{a} e^{\lambda_1 t} + c_2 \bar{b} e^{\lambda_2 t}$ για κατάλληλα $\bar{a} = (a_1, a_2)^T, \bar{b} = (b_1, b_2)^T$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ και c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.
- (ii) Όλες οι λύσεις του συστήματος τείνουν προς το $(0, 0)$, όταν το t τείνει προς το $+\infty$.
- (iii) Υπάρχει μη φραγμένη λύση του συστήματος.
- (iv) Υπάρχει φραγμένη λύση του συστήματος όταν $t \geq 0$.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!

Only Maths

-Official-